



TITLE:

ロビンソン-シェンステッド対応の一般化 (表現論における組合せ論的手法とその応用)

AUTHOR(S):

沼田, 泰英

CITATION:

沼田, 泰英. ロビンソン-シェンステッド対応の一般化 (表現論における組合せ論的手法とその応用). 数理解析研究所講究録 2005, 1438: 186-197

ISSUE DATE:

2005-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47502>

RIGHT:

ロビンソン-シェンステッド対応の一般化

沼田 泰英 (NUMATA, YASUhide)

北海道大学大学院理学研究科

ABSTRACT. グラフが与えられた時, その頂点を基底とする K -線形空間を KV とおく. 頂点 v に対して v を始点 (終点) とする辺達の終点 (始点) の和を対応させる KV 上の K -線形写像を上り (下り) 演算子という. 共通の頂点集合を持つ graded なグラフ G_1, G_2 を用意する. G_1 の上り演算子と G_2 の下り演算子をそれぞれ U, D とおく. $DU - UD = rI$ (ただし, $r \in \mathbb{Z}$, I は恒等写像) という交換関係を満たしているときに G_1 と G_2 は r -dual であるという. この様なグラフの例としては, ヤング束のハッセグラフが挙げられる. ヤング束のハッセグラフにおいて最小限から始まる path は standard tableau と同一視することが出来る. standard tableau には Robinson 対応と呼ばれる対応があるが, これに相当する対応が r -dual なグラフにおいても構成できることを, Fomin が与えている.

一方で同じ形の standard tableau と semi-standard tableau のペア達とワード達の間には Robinson-Schensted 対応と呼ばれる対応が知られている. 最小元からの paths を semi-standard tableaux と同一視できる様なグラフは semi-graded になるが, その下り演算子を D とおくと, ヤング束のハッセグラフの上り演算子 U と $DU - UD = D$ という関係を満たしている. 逆にこの関係を満たしているグラフにおいては Robinson-Schensted 対応に相当する対応が構成できる.

1. NOTATION AND MAIN THEOREM

$(V, E, \text{start}, \text{end})$ (V ; 頂点集合, E ; 辺集合, $\text{start} : E \rightarrow V$; 始点, $\text{end} : E \rightarrow V$; 終点) をグラフと呼ぶ. $\rho : V \rightarrow E$ が $e \in E$ に対して,

- $\rho \circ \text{start}(e) \leq \rho \circ \text{end}(e)$
- $\rho \circ \text{start}(e) = \rho \circ \text{end}(e) \iff \text{start}(e) = \text{end}(e)$

を満たしているときに, ρ を rank function と呼び $(V, \rho, E, \text{start}, \text{end})$ を semi-graded graph と呼ぶ. Semi-graded グラフ $(V, \rho, E, \text{start}, \text{end})$ に対して $V_i = \rho^{-1}(\{i\})$, $E_i = \{e \in E \mid \rho \circ \text{start}(e) + i = \rho \circ \text{end}(e)\}$ とおく. V_i 及び各辺の重複度は常に有限とし, 更に $V_0 \neq \emptyset$, $i < 0$ に対し $V_i = \emptyset$ を仮定する. 特に semi-graded グラフ $(V, \rho, E, \text{start}, \text{end})$ が $E_1 = E$ を満たしているときに, graded であるという. 誤解の恐れが無い場合には, (V, ρ, E) のように start, end を省略する. 我々は共通の

rank function ρ と頂点集合 V をもつグラフのペアを考えることが多いが、この場合、 (V, ρ, E, E') のように省略して書く。

(V, ρ, E) を semi-graded グラフとする。 KV を、 V を basis とする K -線形空間とする。 KV 上の K 線形作用 D_E, U_E を $\lambda \in V$ に対して

$$D_E \lambda = \sum_{e \in E, \text{end}(e) = \lambda} \text{start}(e), \quad U_E \lambda = \sum_{e \in E, \text{start}(e) = \lambda} \text{end}(e)$$

となるように定める。 D_E を *down operator*, U_E を *up operator* と呼ぶ。我々は共通の rank function と頂点集合 V をもつグラフのペア (V, ρ, U, D) を考え、 U は up operator U_U のために、 D は down operator D_D のためにのみ使う。誤解の恐れが無い場合には up operator U_U を U と down operator D_D を D と書く。

(V, ρ, I) というグラフを $I = V$, $\text{start} = \text{end} = \text{id}$ (恒等写像) と定義する。すると、 $D_I = U_I = I$ (恒等写像) となっている。

Semi-graded グラフ $(V, \rho, E), (V, \rho, E')$ に対して、 $E + E' := E \amalg E'$ と定義する。 $(V, \rho, E + E')$ は semi-graded グラフで $U_{E+E'} = U_E + U_{E'}$, $D_{E+E'} = D_E + D_{E'}$ となっている。

以降 $r \in \mathbb{N}$ を固定する。

Up operator U と down operator D が $DU - UD = rI$ 満たしており、 (V, ρ, U) も (V, ρ, D) も共に graded であるときに (V, ρ, U, D) は r -dual であるといい、Robinson 対応に相当する数え上げが行えることが示されている。 ([3])

(V, ρ, U) も (V, ρ, D) も共に semi-graded であるとする。 Up operator U と down operator D は $D(t)U(t') = r(tt')U(t')D(t)$ (ただし、 $U(s)$, $D(s)$, $r(s)$ は母関数 $\sum_i U_i s^i$, $\sum_i D_i s^i$, $\sum_i r_i s^i$ とし、 $r_i \in \mathbb{N}$ とする) を満たしているときに、 *generalized Schur operators* であると言われ、 (V, ρ, U, D) に対して Robinson-Schensted-Knuth 対応に相当する数え上げが行えることが示されている。 ([4])

Up operator U と down operator D が $UD - DU = rD$ という交換関係を満たしているときには、同様の手法を用いて、Robinson-Schensted 対応に相当する数え上げが行えるというのが主結果である。

Theorem 1.1 (主結果). (V, ρ, U, D) を共通の頂点集合をもつ semi-graded なグラフの組とし、特に (V, ρ, U) は graded であるとする。ある $r \in \mathbb{N}$ があって、上り演算子と下り演算子が、交換関係

$$(1) \quad DU - UD = rD$$

A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

を満たしているとする. このとき, (V, ρ, U, D) の RS -対応 Φ と *skew shape* S に対して,

$$\{g' : \partial^+ S \rightarrow G \mid \text{growth}\}$$

と

$$\left\{ (\alpha, g'') \mid \begin{array}{l} \alpha: r\text{-colored generalized word on } C(S), \\ g'' : \partial^- S \rightarrow G, \alpha\text{-compatible growth} \end{array} \right\}$$

の間の一対一対応を Φ -compatible 2-growth $g : S \rightarrow G$ を通して構成することができる.

Example 1.2. Young 図形全体のなす集合 \mathbb{Y} を頂点とするグラフについて考える. $\lambda \vdash n$ に対して,

$$\rho(\lambda) = n$$

$$U = \left\{ (\lambda, \mu) \mid \begin{array}{l} \mu \text{ は } \lambda \text{ に 1 箱} \\ \text{加えて得られるヤング図形} \end{array} \right\}$$

$$D = \left\{ (\lambda, \mu) \mid \begin{array}{l} \mu \text{ は } \lambda \text{ に 各列高々 1 箱} \\ \text{加えて得られるヤング図形} \end{array} \right\}$$

と定める. このとき, (\mathbb{Y}, ρ, U, D) は graded グラフと semi-graded グラフのペアであり. $DU - UD = D$ が成立している. 例えば, $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ に対して実際に計算をしてみると,

$$\begin{aligned} DU \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &= D \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square + \emptyset + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \square, \\ UD \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &= U \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \emptyset \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \square \end{aligned}$$

となりその差はきちんと $D \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \emptyset$ になっている. また, U^n -path は skew standard tableau に, D^n -path は skew semi-standard tableau (column-strict tableau) に対応している.

交換関係 (1) は

$$D_i U = U D_i + r D_{i-1} \quad (\text{for all } i)$$

のように変形できる. このことから次のことは直接計算によりすぐわかる.

Remark 1.3. $DU_1 = rU_1D + D$ を満たしていて $D_0 = I$ であれば, $D_1U_1 = U_1D_1 + rI$ が成立する. 即ち, $D_0 = I$ を満たす我々のグラフ (V, ρ, U_1, D) に対して, (V, ρ, U_1, D_1) は r -dual.

この事実は, Robinson-Schensted 対応を standard tableaux のペアに制限することで, Robinson 対応になるという事に相当している.

Remark 1.4. (V, ρ, U, D) に対して, $U_0 = I$ かつ, $U(t)$ と $D(t)$ が generalized Schur operators であれば, $DU_1 = U_1D + rD$ が成立する. 即ち, (V, ρ, U_1, D) は我々のグラフである.

この事実は, Robinson-Schensted-Knuth 対応を Q-tableau が semi-standard tableau であるものに制限することで, Robinson-Schensted 対応になるという事に相当している.

Remark 1.5. Theorem 1.1 は次の意味で, Robinson-Schensted 対応の一般化になっている.

- 頂点 V を変える. (ヤング図形以外への Robinson-Schensted 対応)
- 辺 U, D を変える. (column strictly tableaux 以外への Robinson-Schensted 対応)
- RS 対応 Φ を変える. (bumping algorithm 以外のアルゴリズムによる Robinson-Schensted 対応)
- Skew shape S を変える. (up down sequence などへの Robinson-Schensted 対応)
- Skew young tableaux への Robinson-Schensted 対応を与えている.

2. PROOF OF MAIN THEOREM

ここで, 主結果の対応の構成方法の概略を与える. そのために, まず, 次の記号を用意する.

Definition 2.1. グラフのペア (V, ρ, E, E') が与えられたとき, $\lambda, \mu \in V$ に対して,

$$C_{E'E}^+(\mu, \lambda) = \left\{ (e', e) \in E' \times E \mid \begin{array}{l} \text{end}(e) = \text{end}(e') \\ \text{start}(e') = \mu, \text{start}(e) = \lambda \end{array} \right\}$$

$$C_{EE'}^-(\mu, \lambda) = \left\{ (e, e') \in E \times E' \mid \begin{array}{l} \text{end}(e) = \mu, \text{end}(e') = \lambda, \\ \text{start}(e) = \text{start}(e') \end{array} \right\}$$

と定義する.

A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

Example 2.2. ヤング図形を頂点とするグラフを Example 1.2 の様に定める. このとき,

$$C_{DU}^+(\square, \square\square) = \left\{ \left(\square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \square\square \right), \left(\square, \square\square\square, \square\square \right) \right\}$$

$$C_{UD}^-(\square, \square\square) = \{ (\square, \emptyset, \square\square) \}$$

$$C_{DU}^+(\emptyset, \square) = \{ (\emptyset, \square\square, \square) \}$$

$$C_{UD}^-(\emptyset, \square) = \emptyset$$

である. ただし, $(\mu, \nu, \lambda) := ((\mu, \nu), (\lambda, \nu))$ の様に書いた.

交換関係 (1) から得られる等式 $DU\lambda = (U + rI)D\lambda$ は次の一対一対応の存在を示唆している.

$$\Phi_{\mu, \lambda} : C_{DU}^+(\mu, \lambda) \longrightarrow (C_{UD}^-(\mu, \lambda) \times \{0\}) \cup (C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{1, \dots, r\}).$$

この一対一対応を各 $(\mu, \lambda) \in V^2$ に対してひとつずつ集めた物 $\Phi = \{\Phi_{\mu, \lambda} \mid (\mu, \lambda) \in V^2\}$ を RS-対応と呼ぶ. これは

$$\Phi : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{DU}^+(\mu, \lambda) \longrightarrow \bigcup_{\lambda, \mu \in V} ((C_{UD}^-(\mu, \lambda) \times \{0\}) \cup (C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{1, \dots, r\}))$$

という全単射だと思えることができる.

Example 2.3. ヤング図形を頂点とするグラフを Example 1.2 の様に定めと, $C_{DU}^+(\square, \square\square)$, $C_{UD}^-(\square, \square\square)$ は Example 1.2 の様になっているので例えば,

$$\Phi_{\square, \square\square} \left(\square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \square\square \right) = ((\square, \emptyset, \square\square), 0)$$

$$\Phi_{\square, \square\square} (\square, \square\square\square, \square\square) = ((\square, \square, \square\square), 1)$$

の様に与えることができる. 一方, $C_{DU}^+(\emptyset, \square)$, $C_{UD}^-(\emptyset, \square)$ は Example 1.2 の様になっているので

$$\Phi_{\emptyset, \square} (\emptyset, \square\square, \square) = ((\emptyset, \emptyset, \square), 1)$$

の様に与えることができる.

NUMATA, Y.

また, 同様に自明な交換関係 $ID = DI$ から次の一対一対応を得る.

$$\Phi'_{\mu, \lambda} : C_{DI}^+(\mu, \lambda) \ni (e, e') \mapsto ((e', e), 0) \in C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{0\}.$$

この自明な一対一対応を RS-対応 Φ に加え $\tilde{\Phi} := \Phi \cup \{ \Phi'_{\mu, \lambda} \mid (\mu, \lambda) \in V^2 \}$ とおき *extended RS-対応* とよぶ. Extended RS-対応 $\tilde{\Phi}$ は

$$\tilde{\Phi} : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{D(I+U)}^+(\mu, \lambda) \longrightarrow \bigcup_{\lambda, \mu \in V} (C_{UD}^-(\mu, \lambda) \times \{0\} \cup C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{0, \dots, r\})$$

という全単射だと思える. $\tilde{\Phi}_1$ を第 1 成分への, $\tilde{\Phi}_2$ を第 2 成分への射影とする (即ち, $\tilde{\Phi}(x, x') = ((e', e), n)$ の時に, $\tilde{\Phi}_1 = (e', e)$, $\tilde{\Phi}_2 = n$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{D(I+U)}^+(\mu, \lambda) &\longrightarrow \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{(I+U)D}^-(\mu, \lambda) \\ \tilde{\Phi}_2 : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{D(I+U)}^+(\mu, \lambda) &\longrightarrow \{0, \dots, r\} \end{aligned}$$

である).

以下, extended RS-対応 $\tilde{\Phi}$ をひとつ固定する. 我々は, 交換関係の示唆する local な paths の対応である extended RS-対応 $\tilde{\Phi}$ を, 貼り合わせることで, global な paths の対応を構成する. さらに, rank を観察することでこの対応が Robinson-Schensted 対応の一般化になっている, 即ち, ワード (を一般化したもの) と対応していることがいえる.

まず, extended RS-対応 $\tilde{\Phi}$ を貼り合わせるための台となるものを用意する.

Definition 2.4. \mathbb{N}^2 の finite convex subposet S を *skew shape* と呼ぶ.

$$\begin{aligned} \rho(i, j) &:= i + j, \\ V_S &:= \{ ((i, j), (i+1, j)) \in S \times S \}, \\ H_S &:= \{ ((i, j), (i, j+1)) \in S \times S \} \end{aligned}$$

とし, (S, ρ, V_S, H_S) という graded グラフのペアだと思う. S の部分集合

$$\square_{i,j} := \{ (i, j), (i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1) \} \subset S$$

を S の *cell* と呼ぶ. 座標の表示が重要ではない場合には, 省略して \square の様を書く. $C(S) := \{ S \text{ の cell } \}$ とおく.

$$\begin{aligned} \partial^+ S &:= \{ (i, j) \in S \mid (i+1, j+1) \notin S \}, \\ \partial^- S &:= \{ (i, j) \in S \mid (i-1, j-1) \notin S \} \end{aligned}$$

をそれぞれ *upper boundary*, *lower boundary* とよぶ.

この skew shape の頂点にグラフの元を置いていき, extended RS-対応を貼り合わせていく.

Definition 2.5. S を skew shape とし, (V, ρ, E, E') を semi-graded グラフのペアとする.

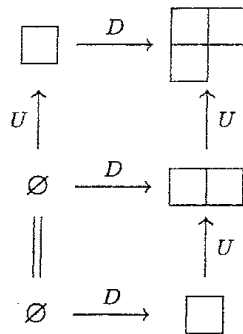
$$g = (g_S : S \rightarrow V, \\ g_V : V_S \rightarrow E, \\ g_H : H_S \rightarrow E')$$

が, $e \in V_S \cup H_S$ に対して常に $\text{start}(g(e)) = g(\text{start}(e))$, $\text{end}(g(e)) = g(\text{end}(e))$ となっているときに, g を S から (V, ρ, E, E') への 2-growth と呼ぶ.

Definition 2.6. RS 対応 Φ が与えられた時に, 任意の S の cell $\square \in C(S)$ に対して, $\tilde{\Phi}_1(g(\partial^+\square)) = g(\partial^-\square)$ となっている時に, 2-growth $g : S \rightarrow (V, \rho, U + I, D)$ は Φ -compatible であるという.

Definition 2.7. Φ -compatible 2-growth $g : S \rightarrow (V, \rho, U + I, D)$ に対して, $\alpha_g : C(S) \rightarrow \{0, \dots, r\}$ を, $\alpha_g(\square) = \tilde{\Phi}_2 \circ g(\partial^+(\square))$ で定義する.

Example 2.8. Example 1.2 のグラフに Example 2.3 のように RS 対応を決める. 例えば



は $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq 2, j \leq 1\}$ 上の Φ -complatible growth を与えている. このとき, $\alpha_g(\square_{1,1}) = 1$, $\alpha_g(\square_{2,1}) = 0$. である.

Φ -compatible growth は各 cell \square において, $\tilde{\Phi}_1(g(\partial^+\square)) = g(\partial^-\square)$ となっているので, $g|_{\partial^+S}$ で一意に決まってしまう. また, $\tilde{\Phi}$ の全単射性から, 各 cell \square において, $\tilde{\Phi}(g(\partial^+\square)) = (g(\partial^-\square), \tilde{\Phi}_2(\partial^-\square))$ であり, $g(\partial^+\square) = \tilde{\Phi}^{-1}(g(\partial^-\square), \alpha_g(\square))$ となっているので, $g|_{\partial^+S}$ と α_g から一意に決まってしまう. これを整理すると次の lemma になる.

Lemma 2.9. RS 対応 Φ が与えられたとき,

$$(2) \quad \{ g|_{\partial^+ S} \mid g \text{ は } S \text{ 上の } \Phi\text{-compatible 2-growth} \}$$

と

$$(3) \quad \{ (g|_{\partial^- S}, \alpha_g) \mid g \text{ は } S \text{ 上の } \Phi\text{-compatible 2-growth} \}$$

の間には g を通して一対一対応を構成できる.

さて, (2) と (3) は何かということに注目する. (2) については,

$$\begin{aligned} & \{ g|_{\partial^+ S} \mid g \text{ は } S \text{ 上の } \Phi\text{-compatible 2-growth} \} \\ &= \{ g \mid \partial^+ S \text{ 上の growth} \} \end{aligned}$$

が成立していることはすぐ分かる. 次に, (3) を記述する為に次の言葉を用意する.

Definition 2.10. S を skew shape とする. $\alpha : C(S) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ が各行高々1つしか non-zero な cell を持たない時, すなわち, $\alpha(\square_{i,j}) \neq 0, \alpha(\square_{i,k}) \neq 0$ ならば $j = k$ が成立している時, α は r -colored generalized word であるという. さらに, $\partial^- S$ 上の 2-growth g に対して, $(i-1, j), (i, j) \in \partial^- S$ で $\rho \circ g(i-1, j) < \rho \circ g(i, j)$ ならば任意の $\square_{i,k} \in C(S)$ に対して $\alpha(\square_{i,k}) = 0$ となっているときに, g は α -compatible であるという.

$\rho \circ g$ に注目する. $\alpha_g(\square_{i,j}) = 0$ であることと, $\rho \circ g(i, j) - \rho \circ g(i-1, j) = \rho \circ g(i, j-1) - \rho \circ g(i-1, j-1)$ が成立していることは同値であることが RS 対応 Φ の定義からわかる. 今 U が graded であるので, $\rho \circ g(i, j) - \rho \circ g(i-1, j)$ は 0 か 1 しか取れない. また $\rho \circ g(i, j) - \rho \circ g(i-1, j) \geq \rho \circ g(i, j-1) - \rho \circ g(i-1, j-1)$ が常に成立しているので, α_g は r -colored generalized word で $g|_{\partial^- S}$ は α_g -compatible であることがわかる. また, Φ の全単射性から,

$$\begin{aligned} & \{ (g|_{\partial^- S}, \alpha_g) \mid g \text{ は } S \text{ 上の growth} \} \\ &= \left\{ (g, \alpha) \mid \begin{array}{l} g; \alpha\text{-compatible growth on } \partial^- S \\ \alpha; r\text{-colored generalized word} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

がわかる. これらを整理することで Theorem 1.1 を得る.

3. EXAMPLES

ここでは, ヤング図形を頂点とするグラフについて見る.

A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

3.1. Variation of Edges. Young 図形全体のなす集合 \mathbb{Y} を頂点とするグラフについて考える. $\lambda \vdash n$ に対して,

$$\begin{aligned}
 U\lambda &= \sum_{\mu; \lambda \text{ に } 1 \text{ 箱}} \mu \\
 &\quad \text{加えて得られるヤング図形} \\
 D\lambda &= \sum_{\mu; \mu \text{ に各列高々 } 1 \text{ 箱}} \mu \\
 &\quad \text{加えて } \lambda \text{ が得られるヤング図形} \\
 D'\lambda &= \sum_{\mu; \mu \text{ に各行高々 } 1 \text{ 箱}} \mu \\
 &\quad \text{加えて } \lambda \text{ が得られるヤング図形}
 \end{aligned}$$

で定める. このとき, Example 1.2 で見たように, $DU - UD = D$ が成立している. さらに, $D'U - UD' = D'$ が成立しており, D^n -path は (skew) row-strict tableau に対応している. さらに, $(DD')U - U(DD') = 2(DD')$ が成立しており, $(DD')^n$ -path は ([7] の意味での) (skew) marked tableau に対応している.

3.2. Variation of RS-correspondences. (\mathbb{Y}, ρ, U, D) について観察する. RS-対応を定めたい. 実は, $(\mu, \lambda) \notin D$ の時には自明な対応しかなく, $(\mu, \lambda) \in D$ の時を定めるだけで, RS-対応は決まる.

$(\mu, \lambda) \in D$ とする. λ と μ を重ねて λ/μ を $\boxed{*}$ で表すと, 例えば, $\lambda = (12, 8, 5, 4)$, $\mu = (10, 5, 5, 3)$ の場合には,

[illegible]

のようにになっている. D の定義より, $\boxed{*}$ は各列高々1つある. この図に λ の coconer 即ち

[illegible]

の \square のうち, その直上に \ast のない箱を加え, 上から $1, 2, \dots$ と名づけ, 一方, μ の coner 即ち

[illegible]

になるようにするには

$$\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & & & a \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & b & \\ \hline & & c & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

から $\boxed{a}, \boxed{b}, \dots$ のいずれか 1 箱を取り除いたものを通過するしかないことがわかる. また, λ で始めて μ で終わる ID -path は μ を通過するものしかない, つまり, μ から 1 箱も取り除かないものである. すなわち, $C_{(U+I)D}^-(\mu, \lambda) = \{(\mu, \lambda \cup x, \lambda) \mid x = \emptyset, \boxed{a}, \boxed{b}, \dots\}$ となっている.

よって, $\{\boxed{1}, \boxed{2}, \dots\}$ と $\{\emptyset, \boxed{a}, \boxed{b}, \dots\}$ の間の対応を定めることで RS 対応を決めることができることがわかる.

例えば, $\boxed{1} \Leftrightarrow \emptyset, \boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{a}, \boxed{3} \Leftrightarrow \boxed{b}, \dots$ のように定めると, Theorem 1.1 の対応は通常の Robinson-Schensted 対応になる.

また $\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{a}, \boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{b}, \dots, \boxed{n} \Leftrightarrow \emptyset$, のように定めると, Theorem 1.1 の対応は column insertion による Robinson-Schensted 対応になる.

3.3. Variation of Skew Shapes. RS 対応を $\boxed{1} \Leftrightarrow \emptyset, \boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{a}, \boxed{3} \Leftrightarrow \boxed{b}, \dots$ のように定める.

$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$ とすると, Theorem 1.1 の対応は $(U + I)D(U + I)D \cdots (U + I)D$ -path の数え上げになっている. 特に $g(n, 0) = g(0, n) = \emptyset$ となっているようなものに着目すると, \emptyset から \emptyset への $(U + I)D(U + I)D \cdots (U + I)D$ -path は $n!$ 個あることがわかる.

$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq n, j \leq m\}$ とする. とくに $g(n, 0) = g(0, n) = \emptyset$ となっているようなものに着目すると, 通常の Robinson-Schensted 対応になる. また $g(n, 0) = g(0, n) = \emptyset$ とは限らない場合には skew tableau に関する Robinson-Schensted 対応を提供している.

REFERENCES

- [1] Fomin, S., Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence, Zar. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 155(1986), 156–175, 195 (Russian); English transl., J. Soviet Math. 41(1988), 979–991.
- [2] Fomin, S., Duality of graded graphs, J. Algebraic Combin.
- [3] Fomin, S., Schensted algorithms for dual graded graphs, J. Algebraic Combin.
- [4] Fomin, S., Schur Operators and Knuth Correspondences, J. of Combinatoric theory, Series A. 72(1995), 277–292.
- [5] Fulton, W., Young Tableaux; with applications to representation theory and geometry, volume 35 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [6] Gessel, Ira M., Counting paths in Young's lattice, J. Statistical planning and inference. 34(1993), 125–134.

NUMATA, Y.

- [7] Matsumoto, S., A scaling limit for t -Schur measures, preprint math.PR/0309037.
- [8] Roby, T., Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets, Ph.D.thesis, M.I.T., 1991.
- [9] Stanley, R., Differential posets, J.American Math. Soc, 1(1988), 919–961.
- [10] Stanley, R., Variations on differential posets, Invariant theory and tableaux (Stanton, D., ed.), IMA volumes in mathematics and its applications, Springer-Verlag, New York, pp.145–165.

E-mail address: nu@math.sci.hokudai.ac.jp